T.C.
NEVŞEHİR HACI BEKTAŞ VELİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

ÇİFT KUTUPLU BULANIK ZWEİER I −YAKINSAK DİZİ UZAYLARI

Tezi Hazırlayan

Hülya ÖNEY

Tez Danışmanı

Doç. Dr. Zarife ZARARSIZ

Matematik Anabilim Dalı

Yüksek Lisans Tezi

HAZİRAN 2024

NEVŞEHİR

T.C.
NEVŞEHİR HACI BEKTAŞ VELİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

ÇİFT KUTUPLU BULANIK ZWEİER I −YAKINSAK DİZİ UAZYLARI

Tezi Hazırlayan

Hülya ÖNEY

Tez Danışmanı

Doç. Dr. Zarife ZARARSIZ

Matematik Anabilim Dalı

Yüksek Lisans Tezi

HAZİRAN 2024

Doç. Dr. Zarife ZARARSIZ danışmanlığında **Hülya ÖNEY** tarafından hazırlanan **"Çift Kutuplu Bulanık Zweier I −Yakınsak Dizi Uzayları"** başlıklı bu çalışma, jürimiz tarafından Nevşehir Hacı Bektaş Veli Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında **Yüksek Lisans Tezi** olarak kabul edilmiştir.

06/07/2024

JÜRİ

BAŞKAN : Dr. Öğr. Üyesi Ziyattin TAŞ

Üye : Doç. Dr. Zarife ZARARSIZ

Üye : Dr. Öğr. Üyesi İbrahim ŞANLIBABA

ONAY:

Bu tezin kabulü Enstitü Yönetim Kurulunun………….. tarih ve …………………… sayılı kuralı ile onaylanmıştır.

…./…./2024

Prof. Dr. Cemal ÇARBOĞA

Enstitü Müdürü

TEZ BİLDİRİM SAYFASI

Tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada yer alan bütün bilgilerin bilimsel ve akademik kurallar çerçevesinde elde edilerek sunulduğunu ve bana ait olmayan her türlü ifade ve bilginin kaynağına eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.

Hülya ÖNEY

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans öğrenimim ve tez çalışmam süresince tüm bilgilerini benimle paylaşmaktan kaçınmayan, sabır ve hoşgörüyle tez yazım sürecimde hiçbir konuda desteğini esirgemeyen ve bu tezin olgunlaşmasında büyük katkıları olan, değerli danışmanım Doç. Dr. Zarife ZARARSIZ'a en içten teşekkürlerimi sunarım.

Eğitim-öğretim hayatımın her adımında maddi manevi desteklerini benden esirgemeyen, yüksek lisansımı bitirmem konusunda beni motive eden anneme ve babama; destekleriyle bana güç veren, değerli zamanlarını benden esirgemeyen kıymetli kardeşlerim Ayşe ve Muhammed'e teşekkür ederim.

Ayrıca tez yazım sürecimde her zaman yanımda olan değerli arkadaşlarım Şahika AYTEKİN ve Özden YİĞİT YILMAZ'a teşekkür ederim.

Küçük yaşta olmasına rağmen eğitimim konusunda manevi desteğini esirgemeyen, her defasında "anne başarabilirsin" diyerek bana güç veren yaşama sebebim canım oğlum Melih ÖNEY'e; tez yazım aşamasında bilgi birikimlerini, maddi ve manevi desteğini benden esirgemeyen, yorulduğumu hissettiğim her anda beni motive eden kıymetli hayat arkadaşım, bilim insanı Dr. Tugay ÖNEY'e sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

ÇİFT KUTUPLU BULANIK ZWEİER I-YAKINSAK DİZİ UZAYLARI

(Yüksek Lisans Tezi)

Hülya ÖNEY

NEVŞEHİR HACI BEKTAŞ VELİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Haziran 2024

ÖZET

Bu tez beş bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde konu ile ilgili genel değerlendirmeler yapılarak konunun literatür araştırması yapıldı.

İkinci bölümde tez yazımında gerekli olan temel tanım ve teoremlere yer verildi.

Üçüncü bölümde ideal, süzgeç, istatistiksel yakınsaklık ve ideal yakınsaklık ile ilgili genel tanım ve teoremlere yer verildi.

Dördüncü bölümde Zweier matris, $Ƶ$ ve $Ƶ_0$, Zweier ideal yakınsak dizi uzayları tanımlarına yer verildi ve çift kutuplu bulanık norm tanımı, çift kutuplu bulanık Zweier I −yakınsak dizi uzayları olan $Ƶ_{\mathfrak{B}}^{I}$ ve $Ƶ_{0\mathfrak{B}}^{I}$ tanımları yapılarak bu uzayların topolojik özellikleri incelendi.

Beşinci bölümde yapılan çalışmanın bulguları doğrultusunda teorik ve uygulamaya dönük öneriler sunuldu.

Anahtar kelimeler: ***Çift kutuplu bulanık küme, İdeal yakınsaklık, Zweier matrisi, Zweier I −yakınsaklık.***
Tez Danışmanı: Doç. Dr. Zarife ZARARSIZ
Sayfa Adedi: 46

BIPOLAR FUZZY ZWEIER I-CONVERGENT SEQUENCE SPACES

(Master's Thesis)

Hülya ÖNEY

NEVSEHIR HACI BEKTAŞ VELİ UNIVERSITY

INSTITUTE OF SCIENCES

June 2024

ABSTRACT

This thesis consists of five chapters. In the first chapter, a literature review of the subject was made by making general evaluations about the subject.

In the second chapter, the basic definitions and theorems necessary for writing the thesis are given.

In the third chapter, general definitions and theorems about ideals, filters, statistical convergence and ideal convergence are given.

In the fourth chapter, the definitions of Zweier matrix, $Ƶ$ and $Ƶ_0$, Zweier ideal convergent sequence spaces were given and their topological properties were analyzed by defining bipolar fuzzy norm, bipolar fuzzy Zweier $I-$convergent sequence spaces $Ƶ^I_{\mathfrak{B}}$ and $Ƶ^I_{0\mathfrak{B}}$.

In the fifth section, theoretical and practical suggestions are presented in line with the findings of the study.

Keywords: ***Bipolar fuzzy set, Ideal convergence, Zweier matrix, Zweier $I-$convergence.***

Thesis Supervisor: Zarife ZARARSIZ

Page Number: 46

İÇİNDEKİLER

KABUL VE ONAY SAYFASI i
TEZ BİLDİRİM SAYFASI ii
TEŞEKKÜR iii
ÖZET iv
ABSTRACT v
İÇİNDEKİLER vi
SİMGELER VE KISALTMALAR LİSTESİ vii
BÖLÜM 1 1
GİRİŞ 1
BÖLÜM 2 5
TEMEL TANIM VE TEOREMLER 5
BÖLÜM 3 15
İSTATİSTİKSEL YAKINSAKLIK VE İDEAL YAKINSAKLIK 15
3.1.İstatistiksel Yakınsaklık 15
3.2.İdeal Yakınsaklık 16
BÖLÜM 4 21
ÇİFT KUTUPLU BULANIK ZWEİER $\boldsymbol{I}$ −YAKINSAK DİZİ UZAYLARI 21
BÖLÜM 5 32
SONUÇ VE ÖNERİLER 32
KAYNAKLAR 33
ÖZGEÇMİŞ 37

SİMGELER VE KISALTMALAR LİSTESİ

$\mathbb{N}$	Doğal sayılar kümesi
$\mathbb{C}$	Karmaşık sayılar kümesi
w	Tüm dizilerin kümesi
l_∞	Sınırlı dizilerin uzayı
c_0	Sıfıra yakınsak dizilerin uzayı
c	Yakınsak dizilerin uzayı
$(Ax)_n$	x dizisinin A matrisi altındaki dönüşüm dizisi
$Ƶ^{I}_{\mathfrak{B}}$	Çift kutuplu bulanık Zweier I −yakınsak dizi uzayı

BÖLÜM 1

GİRİŞ

Belirsizlik, olayların gerçekleşme ihtimallerinin bilinmediği durumu anlatan bir kavramdır. Matematikte problem durumlarında belirsizliklerin ölçülmesi, sayısal olarak ifade edilmesi için olasılık kavramı kullanılmaktadır. 1960'lı yıllarda olasılığın belirsizlik kavramının ölçülmesinde yetersiz kaldığı düşünülerek, belirsizliğin farklı bakış açılarını temsil eden teorilerin geliştirildiği görülmektedir. Bu teoriler ışığında ilgili alanyazında en çok kabul gören ve çalışmaların yapıldığı teori bulanık küme (FS) teorisidir. Bu teoriyi literatüre L.A. Zadeh 1965 yılında "Fuzzy Sets" adlı makalesinde ortaya koymuştur [1]. Ortaya koyduğu bu teori matematik, fen, mühendislik alanlarında olduğu kadar tıp, yapay zeka, robotik, akıllı sistemler, sinyal işleme gibi birçok alanda kullanıldığından multidisipliner özelliktedir.

Klasik anlamda küme "belirli bir özelliğe sahip nesneler topluluğu" şeklinde tanımlanmaktadır. Klasik kümelerde bir eleman ya kümenin elemanıdır ya da değildir. Eğer eleman kümenin özelliklerini sağlıyorsa yani kümenin elemanı ise üyelik değeri 1, sağlamıyorsa yani kümenin elemanı değil ise üyelik değeri 0'dır. Klasik kümelerde bir eleman için kümeye ait olma veya ait olmama durumu varken bulanık kümelerde eleman kümeye kısmen ait olabilmektedir. Zadeh bu aitliğin üyelik derecesi ile belirleneceğini ve üyelik derecesi değer kümesi $[0,1]$ olan üyelik fonksiyonu, X evrensel küme olmak üzere, $\mu: X \rightarrow [0,1]$ ile ölçüleceğini ifade etmektedir. Bir elemanın kümeye ait olma derecesi ile kümeye ait olmama derecesinin toplamının 1 olduğunu belirtmiştir [1]. Zadeh bir elemanın kümeye ait olma derecesini kullanmış Atanassov ise bununla birlikte bir elemanın kümeye ait olmama fikrinin sezgisel bulanık küme (IFS) tanımı ile ortaya koymuştur [2]. Atanassov, bir elemanın kümeye ait olma derecesi ile ait olmama derecesinin toplamının 1 olmak zorunda olmadığını belirtmiştir. Örneğin, bir sınıfta yapılacak olan başkanlık seçimi için adayın başkan seçilmesini isteyen bir grup, diğer tarafta başkan olmasını istemeyen bir grup olduğu düşünülürse, başkan seçilme olasılığı $\%60$ iken, başkan seçilmeme olasılığı $\%25$ olabilir.

Daha sonra Yager ve Abbasov [3] ve Yager [4] Pisagor bulanık kümesini ve üyelik derecelerini tanıtmışlardır. Yager [5], parametreler üzerindeki kısıtlamaları değiştirerek IFS'lerin bir uzantısı olarak tip-2 sezgisel bulanık kümeler olarak bilinen Pisagor bulanık kümeler (PFS) kavramını ve üyelik derecelerini uygulamalarla sunmuştur. Yager [5] tarafından IFS'lerin ve PFS'lerin genelleştirilmiş bir biçimi $q-$dereceli orthopair bulanık kümeler ($q-$ROFS) kavramı tanıtılmıştır. $q-$ROFS'un temel özelliği, üye olma dereceleri ve üye olmama dereceleri için belirsizlik alanının daha dar olmasıdır.

Karmaşık problemlerde artan belirsizlik durumları sonucunda daha açıklanabilir bilgilere duyulan ihtiyaçtan dolayı "bulanık küme", "sezgisel bulanık küme" daha sonrasında Smarandache tarafından 2002 yılında nötrosofik kavramı tanımlanmıştır [6]. Sezgisel bulanık kümede bir elemanın kümeye aitlik derecesi ve ait olmama derecesi varken, nötrosofik kümelerde bunlara ek olarak bir eleman için kararsız olma durumu da değerlendirmeye alınmaktadır. Örneğin bir basketbol maçında A takımının taraftarına takımının kazanma şansı sorulduğunda $\%70$ oranını, karşı takımın taraftarına A takımının kazanma şansı sorulduğunda $\%40$ oranını verebilir. Aynı soru tarafsız bir maç yorumlayıcısına yöneltildiğinde takımlardan birinin kazanma şansının $\%50$ olduğunu söyleyebilir. Bu durum nötrosofik küme modellemesine örnek olarak verilebilir.

Bulanık kümelerin doğuşu ve geliştirilmesi belirsizliklerin devam etmesine engel olmamıştır. İnsanın karar verme süreci çift taraflı yargısal düşünceye veya çift kutuplu düşünceye dayanmaktadır. Karar verme analizi yapılırken hem olumlu hem de olumsuz taraflar düşünülmektedir. Karar vericinin sadece olumlu ya da sadece olumsuz tarafı değerlendirmek zorunda kalmadığı, olayın zıt durumuyla birlikte değerlendirebildiği ve bilişsel olarak modellenebildiği, bulanık kümelerin bir başka genişletilmiş halini Zhang 1994 yılında çift kutuplu bulanık kümeler (BFS) teorisi olarak literatüre kazandırmıştır [7]. Hem çift kutupluluk hem de belirsizlikle baş etmeye çalışan böyle bir teorinin günümüz problemlerine uygulanması kaçınılmazdır. Çift kutuplu bulanıklık, biri negatif ve biri pozitif olan iki kutuplu, bir bulanık değişkene gömülü olacak biçimde tanımlanabilmektedir [7]. Çift kutuplu bulanık kümeler, üyelik derecesi $[-1,1]$ aralığı olan, bulanık kümelerin genelleştirilmiş halidir. Çift kutuplu bulanık kümede, bir elemanın kümeye ait olma derecesi 0 ise elemanın ilgili özelliğe sahip olmadığını, elemanın kümeye aitlik derecesinin $(0,1]$ aralığında olması, elemanın ilgili özelliği bir şekilde karşıladığını ve elemanın aitlik derecesinin $[-1,0)$ aralığında olması elemanın karşı özelliği bir şekilde karşıladığını gösterir. Bahsedilen tanımın altında yatan fikir, bahsedilen kümede iki taraflı bilginin (pozitif bilgi ve negatif bilgi) var olmasıdır. Örnek olarak; dostluk- düşmanlık, etki-yan etki, olasılık-olasılıksızlık gibi düşünceler iki kutupludur. İki tarafın bir arada bulunması, dengesi ve uyumu bir kişinin zihinsel ve bedensel sağlığı ile huzuru için anahtar olarak düşünülebilir. Bu nedenle çift kutuplu bulanık kümelerin birçok alanda kullanılma potansiyeli yüksektir. Bu durum çift kutuplu bulanık kümeler üzerine birçok çalışma yapılması ve geliştirilmesi için motivasyon kaynağı olmuştur. 2014 yılında Chen ve arkadaşları çift kutuplu bulanık kümelerin genellemesi olan m-polar bulanık kümeleri tanımlamıştır [8].

Bulanık kümeler Zadeh tarafından tanımladıktan sonra, birçok araştırmacı bulanık kümeler ve uygulamalarıyla ilgili, bulanık topolojik uzaylar, bulanık sayıların bulanık ölçümleri, bulanık matematiksel programlama gibi birçok alanda çalışmalar yapmıştır. Matloka [9] bulanık sayıların sınırlı ve yakınsak dizilerini tanımlamış ve bazı özelliklerini incelemiştir. Daha sonra bulanık sayı dizilerinin yakınsaklığı Nanda [10] tarafından ele alınmış, Nuray ve Savaş [11] bulanık kümelerin istatistiksel yakınsaklığını tanımlamıştır. Kirişçi ve Şimşek [12] nötrosofik normlu uzaylarda, Karakuş ve arkadaşları [13] ise sezgisel bulanık normlu uzaylarda istatistiksel yakınsaklık kavramını tanımlamıştır. İstatistiksel yakınsaklığın genellemesi olan I −yakınsaklık kavramını, Kostyrko ve arkadaşları [14] tanıtmıştır ve bulanık sayı dizilerinin I −yakınsaklığını Nuray [15] tanımlamıştır. Kişi [16] nötrosofik normlu uzaylarda, Khan ve arkadaşları [17] ise sezgisel bulanık normlu uzaylarda I-yakınsaklık kavramını tanımlamıştır. Şengönül [18] Zweier dizi uzayları olan $\mathcal{Z}$ ve $\mathcal{Z}_0$ ı tanımlamış, daha sonra bir matrisin etki alanından yararlanarak bulanık sayıların Zweier dizi uzayını inşa etmiştir [19].

Bu bilgiler ışığında Khan ve arkadaşları $\mathcal{Z}^I$, $\mathcal{Z}_0^I$, $\mathcal{Z}_\infty^I$ Zweier I −yakınsak dizi uzaylarını tanımlamış, topoojik ve cebirsel özelliklerini incelemişlerdir [20]. Daha sonra Khan ve arkadaşları sezgisel bulanık Zweier I −yakınsak $\mathcal{Z}^I_{(\mu,\nu)}$ ve $\mathcal{Z}^I_{0(\mu,\nu)}$ dizi uzaylarını tanımlamış ve bu uzayların topolojik özelliklerini incelemişlerdir [17].

Bu tezde çift kutuplu bulanık normlu uzay tanımı yapılarak, tanımlanan bu uzayda yakınsaklık, ideal yakınsaklık ve açık yuvar tanımları verilmiştir. Daha sonra Zweier matrisi ve çift kutuplu bulanık kümeler kullanılmış olup, yeni bir ideal yakınsaklık tanımı verilerek Zweier I −yakınsak dizi uzayları inşa edilmiştir. İnşa edilen bu yeni dizi uzaylarının topolojisi ve önemli görülen bazı özellikleri incelenmiştir.

BÖLÜM 2

TEMEL TANIM VE TEOREMLER

Bu bölümde tez ile ilgili gerekli görülen tanım ve teoremlere yer verilmiştir.

Tanım 2.1. **F** reel ya da kompleks sayıların cismi olmak üzere, üzerinde vektör toplaması ve skalerle çarpma işleminin tanımlandığı ve lineer uzay koşullarını sağlayan boş kümeden farklı bir λ kümesine **F** cismi üzerinde lineer uzay veya vektör uzayı denir. λ kümesinin elemanları vektör, **F** cisminin elemanları skalerdir.

λ, toplama işlemi ve skalerle çarpma işlemine göre bir lineer uzay, $\mu \subset \lambda$ olsun. μ nün lineer alt uzay olması için, her $a \in$ **F** ve her $x,\ y \in \mu$ için,

1. $ax \ \in \mu$

2. $x + y \in \mu$

şartlarını sağlaması gerektiği bir çok kaynakta mevcuttur.

λ boştan farklı herhangi bir küme, $g: \mathbb{N} \to \lambda$ şeklinde tanımlanan fonksiyona λ değerli dizi denir. $\lambda = \mathbb{R}$ alındığında g reel değerli dizi, $\lambda = \mathbb{C}$ alındığında g karmaşık değerli dizi olarak adlandırılır.

Bütün reel veya karmaşık terimli dizilerin kümesi $w = \{g: g: \mathbb{N} \to \lambda, k \to g(k) = x_{k,} x = (x_k): k \epsilon \mathbb{N}\}$ şeklinde gösterilir. w kümesi üzerinde tanımlanan,

$+: w \times w \to w$

$\big((x_k), (y_k)\big) \to +\big((x_k), (y_k)\big) = (x_k) + (y_k) = (x_k + y_k)$

ve her $a \in \mathbf{F}$ için

$\cdot : \mathbf{F} \times w \to w$

$\big(a, (x_k)\big) \to \cdot \big(a, (x_k)\big) = a \cdot (x_k) = (ax_k)$

işlemleriyle w, **F** cismi üzerinde bir vektör uzayı teşkil eder ve w uzayının her bir alt vektör uzayına dizi uzayı denir.

Sık kullandığımız w nin bazı özel alt dizi uzayları;

$l_\infty = \{x = (x_k) \in w: sup_{k\in\mathbb{N}}|x_k| < \infty\}$ (Sınırlı dizi uzayı)

$c_0 = \left\{x = (x_k) \in w: \lim_{k\to\infty}(x_k) = 0\right\}$ (Sıfıra yakınsak dizi uzayı)

$c = \left\{x = (x_k) \in w: \lim_{k\to\infty} x_k \ mevcut\right\}$ (Yakınsak dizi uzayı)

$l_P = \{x = (x_k) \in w: \sum_{k=1}^{\infty}|x_k|^p < \infty, 1 \leq p < \infty\}$ (p mutlak yakınsak seri oluşturan dizi)

şeklindedir.

Tanım 2.2. X boştan farklı bir küme olsun. Her $x, y, z \epsilon X$ için,

i. $d(x, y) = 0$ ancak ve ancak $x = y$

ii. $d(x, y) = d(y, x)$

iii. $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$

şartları sağlanıyorsa $d: X \times X \to \mathbb{R}$ fonksiyonuna X üzerinde bir metrik ve (X, d) ikilisine metrik uzay denir [21].

Tanım 2.3. (X, d) bir metrik uzay, $r > 0$ bir reel sayı ve $x_0 \in X$ olsun,

$B(x_0, r) = \{x \in X: d(x, x_0) < r\}$ kümesine X metrik uzayında açık yuvar,

$\bar{B}(x_0, r) = \{x \in X: d(x, x_0) \leq r\}$ kümesine X metrik uzayında kapalı yuvar,

$S(x_0, r) = \{x \in X: d(x, x_0) = r\}$ kümesine X metrik uzayında yuvar yüzeyi

olarak tanımlanır. Bu üç durumun her birinde x_0 merkez, r yarıçaptır [22].

Tanım 2.4. X lineer uzay ve $\|\cdot\|: X \to \mathbb{R}$ olsun. $\|\cdot\|$ fonksiyonu, her $x, y \in X$ vektörü ve her k skaleri için

1. $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = \theta$,

2. $\|kx\| = |k|\|x\|$,
3. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$,

şartları sağlanıyorsa, $\|\cdot\|$ fonksiyonuna X üzerinde bir norm ve $(X, \|\cdot\|)$ ikilisine de normlu uzay denir [23].

Tanım 2.5. X normlu uzayı norm metriğine göre tam ise X e Banach uzayı denir [24].

$l_\infty,\ c,\ c_0$ uzayları $\|x\|_\infty = sup_k|x_k|$ normu ile Banach uzaylarıdır.

Tanım 2.6. (X, d) metrik uzayında (a_n) dizisi alınsın, $a \epsilon X$ olmak üzere $\lim_{n\to\infty} d(a_n, a) = 0$ ise (a_n) dizisi a ya yakınsaktır denir ve $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ ya da $a_n \to a$ şeklinde gösterilir [21].

Tanım 2.7. (X, d) ikilisi bir metrik uzay ve (x_n) bu uzayda bir dizi olsun. Her $\varepsilon > 0$ için $m, n > n_0$ olduğunda $d(x_m, x_n) < \varepsilon$ olacak şekilde bir n_0 sayısı varsa (x_n) dizisine Cauchy dizisi denir [22].

Menger [25] 1942'de üçgensel normların (t −normların) tanımını vermiştir. Menger, uzaydaki iki eleman arasındaki uzaklığı hesaplamak için sayılar yerine olasılık dağılım fonksiyonunu kullanılacağı belirtmiştir. Metrik uzay koşullarında üçgen eşitsizliğini daha genel yapılara genelleştirmiştir. Daha sonra Schweizer ve Sklar [26] tarafından t −normların aksiyomları verilmiştir.

Tanım 2.8. $T: [0,1] \times [0,1] \to [0,1]$ ile tanımlanan T fonksiyonu

1. $T(x, y) = \mathrm{T}(y, x)$,

2. $x_1 \leq x_2$ ve $y_1 \leq y_2$ iken $T(x_1, y_1) \leq \mathrm{T}(x_2, y_2)$,

3. Her $x, y, z \,\epsilon\, [0,1]$ için $T(T(x, y), z) = \mathrm{T}(x, T(y, z))$,

4. $x \epsilon\, [0,1]$ için $T(1, x) = x$

şartlarını sağlıyorsa T fonksiyonuna "üçgensel norm" veya kısaca "t −norm" denir [26].

Tanım 2.9. $S: [0,1] \times [0,1] \to [0,1]$ ile verilen S fonksiyonu her $x, y, z \,\epsilon\, [0,1]$ için;

1. $S(x, y) = S(y, x)$ (simetri),

2. $x_1 \leq x_2$ ve $y_1 \leq y_2$ için $S(x_1, y_1) \leq S(x_2, y_2)$ (monotonluk),

3. $S(S(x, y), z) = S\big(x, S(y, z)\big)$ (birleşimlilik),

4. $S(x, 0) = x$ (sınır şartı)

şartlarını sağlıyorsa S ye üçgensel konorm (kısaca "t −konorm") denir [26].

Tanım 2.10. X boştan farklı bir küme ve $\mu_A: X \rightarrow [0,1]$ üyelik fonsiyonu olsun. $X \times [0,1]$ in boş olmayan $\{(x, \mu_A(x)): x\epsilon X\}$ ile tanımlı alt kümesine X de bir bulanık küme denir [1].

Örnek 2.1. $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ evrensel kümesi üzerinde bir A bulanık kümesi

$A = \{(x_1, 0.5), (x_2, 0.1), (x_3, 0), (x_4, 1)\}$

şeklinde verilsin. $(x_1, 0.5)$ ifadesi x_1 elemanının A kümesine üye olma derecesinin 0.5 olduğunu, $(x_4, 1)$ ifadesi x_4 elemanının A kümesine üye olma derecesinin 1 olduğunu ifade eder.

Tanım 2.11. X keyfi bir küme, $*$ sürekli t −normu ve μ , $X^2 \times (0, \infty)$ üzerinde aşağıdaki koşulları sağlayan bir bulanık küme olsun. Her $x, y, z \in X$ ve $t, s > 0$ olmak üzere

$\mu(x, y, 0) > 0$,

$\mu(x, y, t) = 1 \;\Leftrightarrow x = y$,

$\mu(x, y, t) = \mu(y, x, t)$,

$\mu(x, y, t) * \mu(y, z, s) \leq \mu(x, z, t + s)$,

$\mu(x, y, \cdot): [0, \infty) \rightarrow [0,1]$ fonksiyonu soldan sürekli

koşulları sağlandığında $(X, \mu, *)$ üçlüsüne bulanık metrik uzay denir [27].

Örnek 2.2. $X = \mathbb{N}$ alınsın. $a * b = ab$ t −normu göz önüne alınsın. O halde $x, y \in X$; $t > 0$ için

$$\mu(x,y,t) = \begin{cases} \dfrac{x}{y}, x \leq y \\ \dfrac{y}{x}, y \leq x \end{cases}$$

olmak üzere $(X, \mu, *)$ bulanık metrik uzaydır [27].

Tanım 2.12. $(X, \mu, *)$ bulanık metrik uzayında bir (x_n) dizisi, her $t > 0$ ve $p > 0$ için $\lim_n \mu(x_{n+p}, x_n, t) = 1$ ise Cauchy dizisidir. Her $t > 0$ için $\lim_n \mu(x_n, x, t) = 1$ ise X deki (x_n) dizisi $x \in X$ olmak üzere x e yakınsaktır ve $\lim_n x_n = x$ şeklinde gösterilir [28].

Tanım 2.13. X boştan farklı bir küme olmak üzere X üzerinde A sezgisel bulanık kümesi aşağıdaki şekilde tanımlanır;

$A = \{(x, \mu_A(x), \vartheta_A(x)) : x \epsilon X\}$.

$\mu_A(x): X \to [0,1]$ fonksiyonu $x \epsilon X$ elemanının A kümesine ait olma derecesini,

$\vartheta_A(x): X \to [0,1]$ fonksiyonu $x \epsilon X$ elemanının A kümesine ait olmama derecesini gösterir ve her $x \epsilon X$ için aşağıdaki eşitsizlik sağlanır;

$0 \leq \mu_A(x) + \vartheta_A(x) \leq 1$ [29].

Burada $\pi_A: X \to [0,1]$ fonksiyonunu da x elemanının belirsizliğinin derecesine karşı gelen

$\pi_A(x) = 1 - \mu_A(x) - \vartheta_A(x)$ formülü ile tanımlanır.

Her bulanık küme için $\pi_A(x) = 0$ dır. Her $x \epsilon X$ için bu kümeler

$\{(x, \mu_A(x), 1 - \mu_A(x)) : x \epsilon X\}$ formundadır [30].

Tanım 2.14. X evrensel küme olsun. Bir Pisagor bulanık kümesi (PFS) aşağıdaki şekilde tanımlanır;

$P = \{(x, \mu_P(x), V_P(x)) : x \epsilon X\}$.

Burada $\mu_P: X \rightarrow [0,1]$ dönüşümü x elemanının P kümesine üye olma derecesi ve $V_P: X \rightarrow [0,1]$ dönüşümü x elemanının P kümesine ait olmama derecesini gösterir. Bu dönüşümler arasında

$0 \leq \mu_P^2(x) + V_P^2(x) \leq 1$ bağıntısı(ilişkisi) vardır [5].

Tanım 2.15. X evrensel kümesi üzerinde bir nötrosofik A kümesi şu şekilde tanımlanır:

$$A = \{(x, T_A(x), I_A(x), F_A(x)) : x \epsilon X\}.$$

Burada $T_A(x), I_A(x), F_A(x)$, sırasıyla doğruluk, kararsızlık ve yanlışlık üyelik fonksiyonları olarak adlandırılır. Bu fonskiyonlar $[0,1]$ aralığının alt kümeleridir. x elemanının üyelik derecesi $T_A(x)$, belirsizlik derecesi $I_A(x)$ ve yanlışlık derecesi (üye olmama derecesi) $F_A(x)$ şeklinde temsil edilir. Burada T, I, F nötrosofik bileşenlerdir [31].

Tanım 2.16. BFS'ler, üyelik değeri aralığı $[0, 1]$ aralığından $[-1, 1]$ aralığına kadar genişletilmiş bir bulanık küme türüdür. Çift kutuplu bir bulanık kümede 0 üyelik değeri elemanların ilgili özellikle ilgisiz olduğunu, $[-1, 0]$ üyelik değeri elemanların varsayılan karşıt özelliği karşıladığını ve $[0, 1]$ üyelik değeri elemanların özelliği karşıladığını gösterir. X evrensel kümesi üzerinde çift kutuplu bulanık küme A nın kabul edilen gösterimi aşağıdaki gibidir:

$$A = \left\{\left(a, \left(\mu_A^r(a), \mu_A^\ell(a)\right)\right) : a \epsilon X\right\}.$$

Buradaki pozitif üyelik değeri $\mu_A^r(a): X \rightarrow [0,1]$ bazı $a \in X$ elemanlarının çift kutuplu bulanık küme olan A ya göre özelliği karşılama değerini ve negatif üyelik değeri $\mu_A^\ell(a): X \rightarrow [-1,0]$ bir $a \in X$ elemanının A ya göre bazı karşıt özellikleri karşılama değerini tanımlamaktadır [7].

Zadeh [1] karmaşıklık ve belirsizliklerle başa çıkmak için matematiksel olarak güçlü bir araç sunmuş, ancak bilgi çeşitliliğinin ifade edilmesinde yetersiz kalmıştır. Gerçek hayatta, çift kutuplu bulanık küme teorisi önemsenmesi ve üzerinde çalışılması gereken temel bir teoridir. Bu teori, aynı nesne için pozitif bilgi ve negatif bilgi arasında ayrım yapar. Pozitif bilgi ifadesi ile kastedilen daha öncesinde gözlemlenmiş veya deneyimlendiği için gerçekleşmesi garanti edilen bilgi, negatif bilgi ile kastedilen imkansız, karşıt veya yasak olanı temsil eden bilgidir. Örneğin, şehir merkezinde bulunan bir ev ulaşım gibi birçok yönden olumlu iken (pozitif bilgi), gürültü, hava kirliliği gibi birçok yönden olumsuz (negatif bilgi) olabilir.

Çift kutuplu bulanık kümenin avantajları şu şekilde sıralanabilir:

- Kutupluluk ve bulanıklığa yönelik birleşik bir yaklaşımı formüle eder,

- İnsan algısı ve bilişinin çift kutuplu veya çift taraflı doğasını yakalar,

- Çift kutuplu bilişsel modelleme ve çok alanlı karar verme uygulamalarında kolaylık sağlar [32].

Örnek 2.3. "Kurbağanın avı" şeklinde bir bulanık küme belirlenecek olursa, aşağıdaki gösterim uygun olacaktır:

$Kurbağanın\ avı = \{(örümcek, 1), (sinek, 0.5), (kedi, 0), (yılan, 0)\}.$

Burada hem kedinin hem de yılanın üyelik dereceleri sıfırdır. Yani kurbağa, kedi ve yılanı avlamamaktadır. Kurbağa ve kedinin av-avcı ilişkisi bakımından ilgisiz olduğu fakat yılanın kurbağayı avladığı bilinmektedir. Bu örnekte de görüldüğü gibi bulanık kümeler ilgisiz elemanlar ile karşıt elemanların farkının belirlenmesi noktasında yetersiz kalmakta ve eksik yönleri bulunmaktadır. Bu farkı daha iyi temsil edebilecek bir kümeye ihtiyaç duyulacağından, klasik bulanık küme temsilinden daha bilgilendirici ve detaylı olacağı düşünülen çift kutuplu bulanık küme kavramı ortaya çıkmıştır. Bu düşünceden hareketle yukarıdaki "Kurbağanın avı" örneği daha açıklayıcı olacak şekilde aşağıdaki gibi yazılabilir:

$Kurbağanın\ avı = \{(örümcek, 1), (sinek, 0{,}5), (kedi, 0), (yılan, -1)\}.$

Bu çift kutuplu bulanık kümede, kedi ve yılanın üyelik dereceleri farklıdır. Kedinin üyelik derecesinin 0 olması kurbağaların kedileri avlamadığı anlamına gelirken, yılanın üyelik derecesinin -1 olması kurbağaların yılanlar tarafından avlandığı anlamına gelmektedir. Burada, negatif üyelik dereceleri, karşıt özelliklerin (örneğin, kurbağanın avcısı) karşılanma derecesini gösterir. Çift kutuplu bulanık küme temsili, bazı durumlarda geleneksel bulanık küme temsilinden daha bilgilendiricidir, çünkü aykırı unsurları ilgisiz unsurlardan ayırt etmeyi mümkün kılar. Yukarıda bahsedilen iki kutuplu bulanık kümenin gösterimi şöyledir:

$Kurbağanın\ avı = \{(örümcek, 1,0), (sinek, 0.5,0), (kedi, 0,0), (yılan, 0, -1)\}$.

Tanım 2.17. Çift kutuplu bir $A = \left\{x, \left(\mu_A^r(x), \mu_A^\ell(x)\right): x \in X\right\}$ kümesinin desteği X üzerinde $supp(A) = \{x: \mu_A^r(x) > 0\} \cup \left\{x: \mu_A^\ell(x) < 0\right\}$ şeklinde tanımlanır [33].

Tanım 2.18. $A = \{a, (\mu_A^r(a), \mu_A^\ell(a)): a \in X\}$ ve $B = \left\{ a, \left(\mu_B^r(a), \mu_B^\ell(a)\right): a \in X\right\}$

X üzerinde tanımlı iki çift kutuplu bulanık küme olarak alınsın. Bu durumda $A \subseteq B$ ise;

$\mu_A^r(a) \leq \mu_B^r(a)$

$\mu_A^\ell(a) \geq \mu_B^\ell(a)$ (Her $a \in X$ için)

olarak ifade edilir.

Buna ek olarak,

$AUB = \left\{a, \left(max\{\mu_A^r(a), \mu_B^r(a)\}, min\left\{\mu_A^\ell(a), \mu_B^\ell(a)\right\}\right): a \in X\right\}$ (Birleşme)

$A \cap B = \left\{a, \left(min\{\mu_A^r(a), \mu_B^r(a)\}, max\left\{\mu_A^\ell(a), \mu_B^\ell(a)\right\}\right): a \in X\right\}$ (Kesişim)

$A^c = \left\{a, \left(1 - \mu_A^r(a), -1 - \mu_A^\ell(a)\right): a \in X\right\}$ (Tümleyen) [7].

Tanım 2.19. X bir küme ve bir $A: X \to [0,1]^m$ dönüşümüne X üzerinde m −kutuplu bulanık küme veya $[0,1]^m -$ kümesi denir. X üzerindeki tüm m −kutuplu bulanık kümeler ailesi $m(X)$ olarak gösterilir [8].

Tanım 2.20. Bir ikili aritmetik işlem $S: [-1,0] \times [-1,0] \to [-1,1]$ olsun. Eğer S, her $x_1, x_2, y_1, y_2 \in [-1,0]$ için aşağıdaki özellikleri sağlıyorsa çift kutuplu sürekli simetrik t_s −konormu olarak adlandırılır [34]:

1. S değişmeli ve birleşmelidir

2. S süreklidir

3. $S(x,0) = x$ her $x \in [-1,0]$

4. $x_1 \leq x_2$, $y_1 \leq y_2$ için $S(x_1, y_1) \leq S(x_2, y_2)$.

Tanım 2.21. Her $u, v, z \in A$ için aşağıdaki şartlar sağlandığında $(A, \mathfrak{B}, \Delta, \nabla)$ dörtlüsü çift kutuplu bulanık metrik uzay (BFMS) olarak adlandırılır. Burada A keyfi bir küme, $\mathfrak{B} = \left\{\left(u, \mu_A^r(u), \mu_A^\ell(u)\right) : u \in A\right\}$ çift kutuplu bulanık küme, μ_A^r, μ_A^ℓ; $A \times A \times (0,\infty)$ üzerinde bulanık kümeler, $\mathfrak{B}: A \times A \times (0,\infty) \to [-1,1]$ ve $\alpha, \gamma > 0$ biçimindedir. Ayrıca, Δ ve ∇, sırasıyla, sürekli t −normu ve sürekli simetrik t_s −konormu göstermektedir:

1. $0 \leq \mu_A^r(u,v,\gamma) \leq 1, -1 \leq \mu_A^\ell(u,v,\gamma) \leq 0$

2. $\mu_A^r(u,v,\gamma) + \mu_A^\ell(u,v,\gamma) \leq 1$

3. $\mu_A^r(u,v,\gamma) = 1 \Leftrightarrow u = v$

4. $\mu_A^r(u,v,\gamma) = \mu_A^r(v,u,\gamma)$

5. $\left(\mu_A^r(u,v,\gamma) \Delta \mu_A^r(v,z,\alpha)\right) \leq \mu_A^r(u,z,\gamma+\alpha)$

6. $\mu_A^r(u,v,.) : [0,\infty) \to [-1,1]$ sürekli

7. $\lim_k \mu_A^r(u,v,\gamma) = 1$, $(\forall\, \gamma > 0)$

8. $\mu_A^\ell(u,v,\gamma) = -1 \Leftrightarrow u = v$

9. $\mu_A^\ell(u,v,\gamma) = \mu_A^\ell(v,u,\gamma)$

10. $\mu_A^\ell(u,v,\gamma) \nabla \mu_A^\ell(v,z,\alpha) \geq \mu_A^\ell(u,z,\gamma+\alpha)$

11. $\mu_A^\ell(u,v,.) : [0,\infty) \to [-1,1]$ sürekli

12. $\lim_k \mu_A^\ell(u,v,\gamma) = -1, (\forall\ \gamma > 0)$.

Bunlara ek olarak $\mu_A^r(u,v,\gamma)$ ve $\mu_A^\ell(u,v,\gamma)$ fonksiyonları sırasıyla, γ ya göre u ve v arasındaki yakınlık ve uzaklık değerlerini ifade etmektedir [34].

Sonuç 2.1. Tüm $u \in A$ için $\mu_A^r(u) = \mu_A^\ell(u) = 0$ olması durumunda her bulanık metrik uzay, çift kutuplu metrik uzaydır [34].

Örnek 2.4. Δ, ∇ sırasıyla t −norm ve t_s −conorm olmak üzere tüm $a, b \in [-1,1]$ için $A = \mathbb{Z}/\{0\}$, $a\Delta b = max\{0, a + b - 1\}$, $a\nabla b = max\{0, a + b - 1\}$ alınsın ve μ_A^r, μ_A^ℓ $A \times A \times (0, \infty)$ üzerinde tanımlanan bulanık kümeleri aşağıdaki gibi tanımlanırsa:

$$\mu_A^r(u, v, \gamma) = \begin{cases} \frac{u}{v}, u \leq v \\ \frac{v}{u}, v \leq u \end{cases}$$

$$\mu_A^\ell(u, v, \gamma) = \begin{cases} -\frac{u}{v}, u \leq v \\ -\frac{v}{u}, v \leq u \end{cases}$$

her $u, v \in A$ ve $\gamma > 0$ için, $(A, \mathfrak{B}, \Delta, \nabla)$ kümesi bir çift kutuplu bulanık metrik uzaydır [34].

Sonuç 2.2. $(A, \mathfrak{B}, \Delta, \nabla)$ çift kutuplu bulanık metrik uzay (BFMS) olsun. $\tau_{\mathfrak{B}} = \{X \subset A : \gamma > 0 \; ve \; \delta \in (0,1) \ni \phi(u, v, \gamma) \subset X\}$ A kümesi üzerinde bir topolojidir. Bu durumda *A* üzerindeki herhangi bir BFM $\mathfrak{B}$, $\tau_{\mathfrak{B}}$ topolojisini oluşturur [34].

Teorem 2.1. $(A, \mathfrak{B}, \Delta, \nabla)$ bir BFMS ve $\tau_{\mathfrak{B}}$, A üzerinde bir topoloji olsun. A nın bir (u_k) dizisi u ya yakınsaktır ancak ve ancak $k \to \infty$ için $\mu_A^r(u_k, u, \gamma) \to 1$ ve $\mu_A^\ell(u_k, u, \gamma) \to -1$ şeklinde olmalıdır [34].

BÖLÜM 3

İSTATİSTİKSEL YAKINSAKLIK VE İDEAL YAKINSAKLIK

3.1.İstatistiksel Yakınsaklık

Bir a_n dizisinin a ya yakınsak olması, a nın bir ε komşuluğu dışında dizinin sonlu sayıda elemanın kalması şeklinde ifade edilebilir. Kabul edelim ki a noktasının ε komşuluğu dışında dizinin sonsuz sayıda elemanı olsun. Verilen dizinin eleman sayısı, a noktasının ε komşuluğu dışında kalan sonsuz tane eleman sayısından çok daha fazla olduğu durumda a_n dizisinin hemen hemen bütün elemanları a nın ε komşuluğundadır denilebilir. Böylece a_n dizisinin a ya hemen hemen yakınsak olduğu söylenebilir. Bu fikir matematiksel olarak istatistiksel yakınsaklık kavramı ile ifade edilir. İstatistiksel yakınsaklık tanımının temeli pozitif tam sayıların doğal yoğunluğu kavramına dayanmaktadır.

Tanım 3.1.1 $\mathbb{N}$ doğal sayılar kümesinin bir alt kümesi A olsun. A kümesinin doğal yoğunluğu $\delta(A)$ ile gösterilir ve $\delta(A) = \lim\limits_{n} \frac{1}{n} |\{k \leq n : k \in A\}|$ şeklinde ifade edilir. Burada $|\{k \leq n : k \in A\}|$ ifadesi A kümesinin n den büyük olmayan elemanlarının sayısını göstermektedir [35].

Tanım 3.1.2. (x_n) bir reel sayı dizisi, $x_0 \in \mathbb{R}$ olmak üzere eğer her $\varepsilon > 0$ için

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} |\{k \leq n : |x_k - x_0| \geq \varepsilon\}| = 0$$

olacak şekilde bir x_0 sayısı varsa, x_n dizisi x_0 sayısına istatistiksel yakınsıyor denir. Gösterimi ise $st - \lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$ şeklindedir [36].

Örnek 3.1.1. $x_k = \begin{cases} 1, & k = m^2 \; m = \{1,2,\ldots\} \\ 0, & k \neq m^2 \end{cases}$

şeklinde tanımlanan bir (x_k) dizisi alınsın. Her $\varepsilon > 0$ için

$$|\{k \leq n : |x_k| \geq \varepsilon\}| \leq |\{k \leq n : x_k \neq 0\}| \leq \sqrt{n}$$

olduğundan

$$\lim_n |\{k \leq n : x_k \neq 0\}| \leq \lim_n \frac{\sqrt{n}}{n} = 0$$

elde edilir. Demek ki $\{k \in \mathbb{N} : |x_k - 0| \geq \varepsilon\}$ cümlesinin elemanları hariç diğer bütün k lar ve her $\varepsilon > 0$ için $|x_k - 0| < \varepsilon$ olduğundan (x_k) dizisi istatistiksel olarak sıfıra yakınsar.

Örnek 3.1.2. Bir $x = (x_n)$ dizisi

$$x_k = \begin{cases} \sqrt{k}, & k = m^2 \; m = \{1,2,\dots\} \\ 2, & k \neq m^2 \end{cases}$$

$x = (x_k)$ dizisi için $st - \lim_n x = 2$ dir.

3.2.İdeal Yakınsaklık

Tanım 3.2.1. $X \neq \emptyset$ kümesinin kuvvet kümesi 2^x olmak üzere, $I \subseteq 2^x$ ailesi için,

1. $\emptyset \in I$

2. $A, B \in I$ için $A \cup B \in I$ (toplamsallık)

3. $A \in I$ ve $B \subset A$ ise $B \in I$ (kalıtsallık)

şartları sağlanıyorsa I ya X de bir ideal denir [37].

Tanım 3.2.2. X de aşikar olmayan bir I ideali, her $x \in X$ için $\{x\} \in I$ oluyorsa, I ya uygun ideal denir [38]. Yani X kümesinin tüm sonlu alt kümelerini bulunduran ideale uygun ideal denir.

Tanım 3.2.3. $X \neq \emptyset$ kümesinin kuvvet kümesi 2^x olmak üzere, $F \subset 2^x$ ailesi için,

1. $\emptyset \notin F$,

2. $A, B \in F$ için $A \cap B \in F$,

3. Her $A \in F$ ve $B \supset A$ iken $B \in F$

şartlarını sağlıyorsa F ye X de bir filtre denir [37].

$X \neq \emptyset$, I ideali X de aşikar olmayan bir ideal olsun. O halde

$F(I) = \{M \subseteq X : \exists A \in I : M = X \setminus A\}$ sınıfı X de bir filtredir [38].

İstatistiksel yakınsaklık kavramı ve benzer yakınsaklık kavramlarının incelenmesi (örneğin; Buck [39], Buck [40], Miller [41]) araştırmacıları $I-$yakınsaklık kavramını tanıtmaya yönlendirmiştir. Kostyrko ve arkadaşları [38] $I-$yakınsaklık kavramını tanıtmış ve temel özelliklerini incelemişlerdir.

Toplanabilme teorisi için önemli olan kavramlardan biri olan ideal yakınsaklık yani $I-$yakınsaklık, istatistiksel yakınsaklık kavramının genelleştirilmiş halidir. Bir (x_n) dizisinin x_0 noktasının ε komşuluğu dışında kalan elemanları idealin elemanı ise (x_n) dizisi x_0 noktasına ideal yakınsaktır denir. Bu açıklama matematiksel olarak aşağıdaki şekilde ifade edilmiştir.

Tanım 3.2.4. $\mathbb{N}$ nin aşikar olmayan bir ideali I olsun. Bir $x = (x_n)_1^\infty$ gerçel sayı dizisinin her $\varepsilon > 0$ için $A(\varepsilon) = \{n \in \mathbb{N} : |x_n - \xi| \geq \varepsilon\}$ kümesi I ya ait ise $x = (x_n)$ dizisi $\xi \in R$ sayısına $I-$yakınsaktır denir. ξ sayısına $x = (x_n)_1^\infty$ dizisinin $I-$limitidir denir ve $I - \lim x_n = \xi$ ile gösterilir [38].

Tanım 3.2.5. (X, ρ) bir metrik uzay ve $\mathbb{N}$ nin aşikar olmayan bir ideali I olsun. X in elamanlarından oluşan bir $x = (x_n)_{n \epsilon \mathbb{N}}$ dizisinin $\xi \epsilon X$ elemanına $I-$yakınsaktır ancak ve ancak $\varepsilon > 0$ için $A(\varepsilon) = \{n \epsilon \mathbb{N} : \rho(x_n, \xi) \geq \varepsilon\}$ kümesi I ya aittir. ξ elemanına $x = (x_n)_{n \epsilon \mathbb{N}}$ dizisinin $I-$limiti denir ve $\xi = I - \lim\limits_{n \to \infty} x_n$ şeklinde gösterilir [14].

Açıklama: Bir metrik uzaydaki yakınsak dizilerin $I-$yakınsaması benzer şekilde tanımlanabilir. L ye $I-$yakınsak tüm dizilerin uzayı

$c^I = \{(x_k) \in w : \{k \in \mathbb{N} : |x_k - L| \geq \varepsilon\} \in I, bazı\ L \in \mathbb{C}\ için\}$

şeklinde yazılabilir [42].

Örnek 3.2.1. I_S, $\mathbb{N}$ doğal sayılar kümesinin bütün sonlu alt kümelerinin sınıfı olsun. I_S aşikar olmayan uygun ideal ve I_S-yakınsaklık, X üzerinde ρ metriğine göre bilinen yakınsaklık ile çakışır [14].

Örnek 3.2.2. $I = I_f = \{A \subseteq \mathbb{N} : \delta(A) = 0\}$ alınsın. I_f, $\mathbb{N}$ üzerinde bir uygun ideal olur. Böylece I_f −yakınsaklığın istatistiksel yakınsaklığa denk olduğu ifade edilebilir [14].

Klasik anlamda yakınsak olmayan bir dizinin seçilen ideale göre yakınsadığı nokta değişebilir. Bu ise anlamlı değildir. Anlamlı olması için idealin uygun ideal olması gerekir. Uygun ideal alındığında yakınsadığı nokta değişmemektedir.

Bir (x_n) dizisi x_0 a yakınsıyorsa uygun ideal alındığında (x_n) dizisi x_0 noktasına I −yakınsaktır. Bu durumda "İdeal yakınsaklık kavramı klasik anlamda yakınsaklık aksiyomlarını sağlıyor mu?" sorusu akla gelebilir. Bu durum Kostyrko ve arkadaşları tarafından araştırılmıştır [14].

Klasik anlamında yakınsama aksiyomları aşağıdaki gibidir:

(S) Her sabit dizi $x = \{\delta, \delta, \delta, ...\}$, δ noktasına yakınsaktır.

(H) Yakınsak her dizinin limiti tektir. Yani $\lim_n x_n = \delta$ ve $\lim_n x_n = a$ ise $\delta = a$ dır.

(F) Yakınsak her dizinin alt dizileri de aynı değere yakınsar. $\lim x = \delta$ ve y dizisi x dizisinin alt dizisi ise $\lim y = \delta$ olur.

(U) $x = (x_n)$ dizisinin tüm alt dizileri, δ ya yakınsayan bir alt diziye sahipse x dizisi δ ya yakınsaktır [14].

Önerme: En az iki elemanı olan bir X uzayını alalım ve $I \subset 2^x, X$ uzayının uygun ideali olsun.

i. I −yakınsaklık (S), (H) ve (U) aksiyomlarını sağlar.
ii. Eğer I sonsuz küme içeriyorsa, I −yakınsaklık (F) aksiyomunu sağlamaz [14].

İspat: i. (S) aksiyomunun sağlandığı açıktır.

(H) aksiyomunun ispatı için X uzayında bir $x = (x_n)$ dizisini ve $k \neq t$ olmak üzere $k, t \in X$ alınsın. Burada $I - \lim_n x_n = k$ ve $I - \lim_n x_n = t$ olsun ve $\frac{1}{2}\rho(k,t) > \varepsilon > 0$ olacak şekilde bir ε sayısı alınsın. I −yakınsaklık tanımına göre,

$A_1(\varepsilon) = \{n \in \mathbb{N}: \rho(x_n, k) \geq \varepsilon\} \in I$ ve

$\mathrm{A}_2(\varepsilon) = \{\mathrm{n} \in \mathbb{N}: \rho(x_n, t) \geq \varepsilon\} \in \mathrm{I}$

olduğundan $\mathbb{N}/A_1(\varepsilon)$, $\mathbb{N} / A_2(\varepsilon) \in F(I)$ elde edilir.

$\mathbb{N}/A_1(\varepsilon) = \{n \in \mathbb{N}: \rho(x_n, k) < \varepsilon\}$ ve

$\mathbb{N}/A_2(\varepsilon) = \{n \in \mathbb{N}: \rho(x_n, t) < \varepsilon\}$

kümelerinin en az bir ortak elemanı vardır. $k \neq t$ olarak alındığı için

$\rho(k, t) \leq \rho(x_n, k) + \rho(x_n, t)$

$\rho(k, t) < \varepsilon + \varepsilon$

$\rho(k, t) < 2\varepsilon$

ifadesi elde edilir. Bu ifade kabul ile çelişmektedir. O halde bir dizi I −yakınsak ise bu limit tektir.

(U) Bir $x = (x_n)$ dizisi alınsın. Bu dizinin her bir alt dizisinin δ noktasına yakınsayan bir alt diziye sahip olduğunu fakat x dizisinin δ noktasına I −yakınsak olmadığı kabul edilsin. İdeal yakınsaklık tanımından her $\varepsilon_0 > 0$ için,

$A(\varepsilon_0) = \{n \in \mathbb{N}: \rho(x_n, \delta) \geq \varepsilon_0\} \notin I$

olarak yazılır. Buradan I uygun ideal olduğundan $A(\varepsilon_0)$ kümesinin sonsuz bir küme olduğu ifade edilir. $A(\varepsilon_0) = \{n_1 < n_2 < \cdots < n_k < \cdots\}$ şeklinde alınsın. $y_n = x_{n_k}$, $k \in \mathbb{N}$, dizisi alınsın. y_n dizisinin x in bir alt dizisi olduğu açıkça görülmektedir. Bu durumda y_n dizisinin δ ye I −yakınsak olmayan en az bir alt dizisi bulunur. Bu durum kabule uygun değildir.

ii. $A \in I$ sonsuz kümesi alınsın. $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_k, \ldots\}$ şeklinde yazılabilir. I aşikar olmayan ideal olduğundan dolayı $B = \mathbb{N}/A = \{b_1, b_2, \ldots, b_k, \ldots\}$ kümeside sonsuz elemanlı bir kümedir. $\delta_1, \delta_2 \in X, \delta_1 \neq \delta_2$ ile $x = (x_a)$ dizisi tanımlansın. $k \in \mathbb{N}$ için $x_{a_k} = \delta_1$ ve $x_{b_k} = \delta_2$ şeklinde ifade edilsin. Buradan $I - \lim_k x_k = \delta_2$ fakat alt dizisi x_{a_k} için $I - \lim_k x_{a_k} = \delta_1$ yazılır [14].

Açıklama: Eğer I herhangi bir sonsuz küme içermeyen uygun bir ideal ise, I −yakınsaklık bilinen yakınsaklıkla çakışır ve (F) aksiyomu sağlanır [14].

BÖLÜM 4

ÇİFT KUTUPLU BULANIK ZWEİER I −YAKINSAK DİZİ UZAYLARI

Bu bölümde Zweier matris, $\mathbb{Z}$ ve $\mathbb{Z}_0$ uzayları, Zweier ideal yakınsak dizi uzayları tanımlarına yer verilmiş ve çift kutuplu bulanık Zweier I −yakınsak dizi uzayları $\mathbb{Z}^I_{\mathfrak{B}}$ ve $\mathbb{Z}^I_{0\mathfrak{B}}$ kavramları verilerek topolojik özellikleri incelenmiştir.

Tanım 4.1. $\lambda,\ \mu \subset w$ ve $A = (a_{nk})$ $(n, k\ \in N)$ satır ve sütun sayıları sonsuz olan bir matris olmak üzere her $x \in\ \lambda$ için $Ax = ((Ax)_n)$ dönüşüm dizisi μ nün elemanı ise $((Ax)_n)$ dizisine x dizisinin $A-$ dönüşümü denir. A matrislerinin sınıfı $A: \lambda \to \mu$ olacak şekilde $(\lambda: \mu)$ ifadesiyle gösterilir. Burada $(Ax)_n = \sum_k a_{nk}x_k$ şeklinde ifade edilir. Dönüşüm dizilerinin mevcut olması için

$$Ax = (Ax)_n = \sum_k a_{nk}x_k$$

serisinin her bir $n \in \mathbb{N}$ için yakınsak olması gerektiği açık olarak görülmektedir [43].

Tanım 4.2. A sonsuz bir matris ve φ bir dizi uzayı olsun.

$\varphi_A = \{x \in w: Ax \in \varphi\}$ kümesine A lineer dönüşümünün veya A matrisinin φ üzerindeki etki alanı denir [44].

Dizi uzayları ile ilgili yapılan çalışmalarda ilgilenilen problemlerden biri çeşitli yöntemlerle yeni dizi uzayı inşa etmektir. Özel bir matrisin etki alanından faydalanarak yeni bir dizi uzayı inşa etmek araştırmacılar tarafından en çok kullanılan yöntemlerden biridir. Altay, Başar ve Mursaleen [45], Malkowsky [46] ve Ng ve Lee [47] bu yöntemi kullanan araştırmacılardan birkaçıdır.

Tanım 4.3. $y = (y_i)$ dizisini, $x = (x_i)$ dizisinin Z^p dönüşüm olarak tanımlanır, yani,

$$y_i = px_i + (1-p)x_{i-1}$$

şeklinde ifade edilir. Burada $x_{-1} = 0, p \neq 1$ ve Z^p aşağıdaki şekilde tanımlanan $Z^p = (z_{ik})$ matrisini gösterir, yani

$$z_{ik}=\begin{cases} p, & (i=k) \\ 1-p, & (i-1=k)(i,k\in\mathbb{N}) \\ 0, & diğer\ durumlarda \end{cases}$$

şeklindedir [18].

Tanım 4.4. Z^p −dönüşümleri sırasıyla c ve c_0 uzaylarında olacak şekilde tüm dizilerin kümesi Ƶ ve $Ƶ_0$ uzayları aşağıdaki gibi tanımlanır;

$Ƶ=\{x=(x_k)\in w:(Z^p x)\in c\}$

$Ƶ_0=\{x=(x_k)\in w:(Z^p x)\in c_0\}$ [18].

Teorem 4.1. Ƶ ve $Ƶ_0$ dizi uzayları sırasıyla c ve c_0 uzaylarına lineer izomorfiktir. Yani $Ƶ\cong c$ ve $Ƶ_0\cong c_0$ şeklinde ifade edilir [18].

Khan ve arkadaşları $Ƶ^I$, $Ƶ_0^I$, $Ƶ_\infty^I$ Zweier I −yakınsak dizi uzaylarını aşağıdaki gibi tanımlamışlardır [20].

Tanım 4.5. $Ƶ^I=\{x=(x_k)\in w:\{k\in\mathbb{N}:I-\lim Z^p x=L\}, öyleki\ bir\ L\in\mathbb{C}\ için\}$;

$Ƶ_0^I=\{x=(x_k)\in w:\{k\in\mathbb{N}:I-\lim Z^p x=0\}\}$;

$Ƶ_\infty^I=\{x=(x_k)\in w:\{k\in\mathbb{N}:\sup_k|Z^p x|<\infty\}\}$.

Daha anlaşılabilir olması açısından, tez boyunca $x,y,z\in w$ için

$Z^p(x_k)=x^/$, $Z^p(y_k)=y^/$, $Z^p(z_k)=z^/$ kısaltmaları kullanılacaktır [20].

Teorem 4.2 $Ƶ^I$, $Ƶ_0^I$ lineer uzaylardır [20].

İspat: $({x^/}_k)$, $({y^/}_k)\in Ƶ_0^I$ ve α,β skaler olsun. Buradan,

$I-\lim|x_k^/|=0$ ve $I-\lim|y_k^/|=0$ yazılır.

Verilen her $\varepsilon>0$ için,

$A_1=\{k\in\mathbb{N}:|x_k^/|>\frac{\varepsilon}{2}\}\in I$ (1)

$A_2=\{k\in\mathbb{N}:|y_k^/|>\frac{\varepsilon}{2}\}\in I$ (2)

şeklinde yazılır.

$$\left|\alpha x_k^{/} + \beta y_k^{/}\right| \leq |\alpha|\left|x_k^{/}\right| + |\beta|\left|y_k^{/}\right|$$

(1) ve (2) ifadeleri kullanılarak,

$$\left\{k \in \mathbb{N}: \left|\alpha x_k^{/} + \beta y_k^{/}\right| > \varepsilon\right\} \subset A_1 \cup A_2$$

yazılır. Buradan $\left(\alpha x_k^{/} + \beta y_k^{/}\right) \in \text{Ƶ}_0^I$ ve dolayısıyla Ƶ_0^I bir lineer uzaydır.

Ƶ^I için ispat benzer şekilde yapılmaktadır.

Teorem 4.3. Ƶ^I ve Ƶ_0^I dizi uzayları sırasıyla c^I ve c_0^I uzaylarına lineer izomorfiktir.

Yani $\text{Ƶ}^I \cong c^I$ ve $\text{Ƶ}_0^I \cong c_0^I$ dır [20].

Tanım 4.6. A vektör uzayı, Δ sürekli t −norm, ∇ sürekli simetrik t_s −konorm olsun. Eğer μ_A^r ve μ_A^ℓ, $A \times (0, \infty) \to [-1,1]$ üzerinde aşağıdaki koşulları sağlayan bulanık kümeler ise $\mathfrak{B} = \left\{\left(u, \mu_A^r(u), \mu_A^\ell(u): u \in A\right)\right\}$ olmak üzere $V = (A, \mathfrak{B}, \Delta, \nabla)$ (BFNS) dörtlüsüne çift kutuplu bulanık normlu uzay denir.

1. $0 \leq \mu_A^r(u, \lambda) \leq 1, -1 \leq \mu_A^\ell(u, \lambda) \leq 0,$

2. $\mu_A^r(u, \lambda) + \mu_A^\ell(u, \lambda) \leq 1,$

3. $\mu_A^r(u, \lambda) = 1 \Leftrightarrow u = 0,$

4. $\mu_A^r(\alpha u, \lambda) = \mu_A^r\left(u, \frac{\lambda}{|\alpha|}\right), \alpha \neq 0,$

5. $\mu_A^r(u, \mu) \Delta \mu_A^r(v, \lambda) \leq \mu_A^r(u + v, \mu + \lambda),$

6. $\mu_A^r(u, .): [0, \infty) \to [0,1]$ sürekli,

7. $\lim\limits_{\lambda \to \infty} \mu_A^r(u, \lambda) = 1,$

8. $\mu_A^\ell(u, \lambda) = -1 \Leftrightarrow u = 0,$

9. $\mu_A^\ell(au, \lambda) = \mu_A^\ell\left(u, \frac{\lambda}{|\alpha|}\right), \alpha \neq 0,$

10. $\mu_A^\ell(u, \mu) \nabla \mu_A^\ell(v, \lambda) \geq \mu_A^\ell(u + v, \mu + \lambda),$

11. $\mu_A^\ell(u,.)\colon [0,\infty) \to [-1,0]$ sürekli,

12. $\lim_{\lambda\to\infty} \mu_A^\ell(u,\lambda) = -1$,

13. $u\Delta u = u$ ve $u\nabla u = u$, her $u \in [-1,1]$ için.

Burada $u, v \in A$, $\lambda, \mu > 0$ ve $\alpha \neq 0$ dır. Böylece $\mathfrak{B} = (\mu_A^r, \mu_A^\ell)$ çift kutuplu bulanık norm olarak adlandırılır.

Örnek 4.1. $(A, \mathfrak{B}, \Delta, \nabla)$ BFNS olsun. Δ, ∇ sırasıyla t −norm ve t_s −conorm olmak üzere tüm $a, b \in [-1,1]$ için $a\Delta b = min\{a, b\}$ ve $a\nabla b = max\{a, b\}$ olarak alınsın. $\mathfrak{B}\colon A \times (0,\infty) \to [-1,1]$ üzerinde $\mu_A^r(u)$, $\mu_A^\ell(u)$ bulanık kümeleri aşağıdaki gibi tanımlanırsa;

$$\mu_A^r(u,\lambda) = \frac{\lambda}{\lambda + \|u\|}$$

$$\mu_A^\ell(u,\lambda) = -\frac{\lambda}{\lambda + \|u\|}$$

her $u \in A$ ve $\lambda > 0$ için, $V = (A, \mathfrak{B}, \Delta, \nabla)$ kümesi bir çift kutuplu bulanık normlu uzaydır.

Tanım 4.7. $(A, \mathfrak{B}, \Delta, \nabla)$ BFNS olsun. Bir $x = (x_n)$ dizisi $\mathfrak{B} = (\mu_A^r, \mu_A^\ell)$ normuna göre, her $\varepsilon > 0$ ve $\lambda > 0$ için $\mu_A^r(x_n - L, \lambda) \geq 1 - \varepsilon$ ve $\mu_A^\ell(x_n - L, \lambda) \leq \varepsilon - 1$ olacak şekilde bir $n > n_0$, $n_0 \in \mathbb{N}$ var ise (x_n) dizisi $L \in A$ ya yakınsaktır. $\mathfrak{B} - \lim_n x = L$ şeklinde gösterilir.

Teorem 4.4. Çift kutuplu bulanık normlu uzaylar aşağıdaki özellikleri sağlamaktadır.

i. Çift kutuplu bulanık normlu uzayda alınan bir (x_n) dizisinin limiti varsa tektir.

ii. Çift kutuplu bulanık normlu uzayda (x_n) ve (y_n) iki dizi olmak üzere,

$\mathfrak{B} - \lim_{n\to\infty} x_n = L_1$ ve $\mathfrak{B} - \lim_{n\to\infty} y_n = L_2$ ise $\mathfrak{B} - \lim_{n\to\infty} x_n + y_n = L_1 + L_2$ dir.

iii. Çift kutuplu bulanık normlu uzayda bir (x_n) dizisi için $\mathfrak{B} - \lim_{n\to\infty} x_n = L_1$ ise $\alpha \neq 0$ olmak üzere $\mathfrak{B} - \lim_{n\to\infty} \alpha x_n = \alpha L_1$ dir.

İspat: i. $V = (A, \mathfrak{B}, \Delta, \nabla)$ BFNS, her $\varepsilon > 0$ ve $\lambda > 0$ için $x = (x_n)$ V de bir dizi olsun. Bir $x = (x_n)$ dizisinin limitleri $\mathfrak{B} - \lim x = L_1$ ve $\mathfrak{B} - \lim x = L_2$ alınsın, bu durumda

$\mu_A^r(x_n - L_1, \lambda) \geq 1 - \varepsilon$ ve $\mu_A^\ell(x_n - L_1, \lambda) \leq \varepsilon - 1,$

$\mu_A^r(x_n - L_2, \lambda) \geq 1 - \varepsilon$ ve $\mu_A^\ell(x_n - L_2, \lambda) \leq \varepsilon - 1$ yazılır. Burada Δ sürekli t −norm ve ∇ sürekli simetrik t_s −konorm olmak üzere,

$$\begin{aligned}\mu_A^r(x_n - L_1, \lambda)\Delta\, \mu_A^r(x_n - L_2, \lambda) &\leq \mu_A^r(x_n + x_n - (L_1 + L_2), \lambda + \lambda)\\ &= \mu_A^r(2x_n - (L_1 + L_2), 2\lambda)\\ &= \mu_A^r\left(x_n - \tfrac{(L_1+L_2)}{2}, \lambda\right)\end{aligned}$$

$(1 - \varepsilon)\Delta\,(1 - \varepsilon) = (1 - \varepsilon) < \mu_A^r\left(x_n - \frac{(L_1+L_2)}{2}, \lambda\right)$ elde edilir. Kabul gereği $\frac{(L_1+L_2)}{2}$ elemanının L_1 veya L_2 elemanına eşit olması gerekir. Buradan $L_1 = L_2$ olduğu kolayca görüleblir. Aynı şekilde,

$$\begin{aligned}\mu_A^\ell\left(x_n - \frac{(L_1 + L_2)}{2}, \lambda\right) &= \mu_A^\ell(2x_n - (L_1 + L_2), 2\lambda)\\ &= \mu_A^\ell(x_n + x_n - (L_1 + L_2), \lambda + \lambda)\\ &\leq \mu_A^\ell(x_n - L_1, \lambda)\nabla\mu_A^\ell(x_n - L_2, \lambda) < (\varepsilon - 1)\nabla(\varepsilon - 1)\\ &< (\varepsilon - 1)\end{aligned}$$

$\mu_A^\ell\left(x_n - \frac{(L_1+L_2)}{2}, \lambda\right) < (\varepsilon - 1)$ elde edilir. Buradan $L_1 = L_2$ olduğu için (x_n) dizisinin limiti tektir.

ii ve iii nin ispatı tanım 4.7. ve i nin ispatından açıktır.

Tanım 4.8. $I \subseteq 2^x$ aşikar olmayan bir ideal, V bir BFNS ve (x_n) V de bir dizi olsun. Her $\varepsilon > 0$ ve $\lambda > 0$ olmak üzere

$$\left\{n \in \mathbb{N}: \mu_A^r(x_n - L, \lambda) \geq 1 - \varepsilon \; veya \; \mu_A^\ell(x_n - L, \lambda) \leq \varepsilon - 1 \right\} \in I$$

oluyorsa, (x_n) dizisi $\mathfrak{B} = (\mu_A^r, \mu_A^\ell)$ normuyla $L \in A$ elemanına I −yakınsaktır denir. $I_{\mathfrak{B}} - \lim x_n = L$ şeklinde gösterilir.

Tanım 4.9. $V = (A, \mathfrak{B}, \Delta, \nabla)$ BFNS olsun. $r \in (0,1)$, $t > 0$ ve $x \in A$ alınsın.

$B_x(r,t) = \{k \in \mathbb{N}: \mu_A^r(x_k - L, t) \geq 1 - r \; veya \; \mu_A^\ell(x_k - L, t) \leq r - 1\} \in I$ kümesi, t'ye göre merkezi x ve yarıçapı r olan bir açık yuvar olarak adlandırılır.

Yukarıda yapılan çift kutuplu normlu uzay ve bu uzayda verilen yakınsaklık ve açık yuvar tanımlarından sonra aşağıda dizi uzaylarından bahsedilecektir.

Khan, Ebadullah ve Yasmeen [20] aşağıdaki dizi sınıflarını tanıtmıştır.

$$\mathcal{Z}^I = \{x = (x_k) \in w: \forall\, \varepsilon > 0 \; için, \{k \in \mathbb{N}: |x_k^/ - L| \geq \varepsilon\} \in I, \; L \in \mathbb{C} \; vardır\}$$

$$\mathcal{Z}_0^I = \{x = (x_k) \in w: \forall\, \varepsilon > 0 \; için, \{|x_k^/| \geq \varepsilon\} \in I\},$$

burada $x \in w$ olmak üzere $Z^p(x_k) = x^/$ tanımlanmıştır.

Bu tezde çift kutuplu bulanık Zweier I −yakınsak dizi uzayları aşağıdaki gibi tanımlanacaktır.

$$\mathcal{Z}_{\mathfrak{B}}^I = \left\{x = (x_k) \in w: \left\{k \in \mathbb{N}: \mu_A^r\left(x_k^/ - L, t\right) \geq 1 - \varepsilon \; veya \; \mu_A^\ell\left(x_k^/ - L, t\right) \leq \varepsilon - 1\right\} \in I\right\};$$

$$\mathcal{Z}_{0\mathfrak{B}}^I = \left\{x = (x_k) \in w: \left\{k \in \mathbb{N}: \mu_A^r\left(x_k^/, t\right) \geq 1 - \varepsilon \; veya \; \mu_A^\ell\left(x_k^/, t\right) \leq \varepsilon - 1\right\} \in I\right\}$$

Teorem 4.5. $\mathcal{Z}_{\mathfrak{B}}^I$ ve $\mathcal{Z}_{0\mathfrak{B}}^I$ lineer uzaylardır.

İspat 1: $(x^/), (y^/) \in \mathcal{Z}_{\mathfrak{B}}^I$ ve α, β skaler olsun. O halde verilen her $\varepsilon > 0$ için;

$$A_1 = \left\{k \in \mathbb{N}: \mu_A^r\left(x_k^/ - L_1, \tfrac{t}{2|\alpha|}\right) \geq 1 - \varepsilon \; veya \; \mu_A^\ell\left(x_k^/ - L_1, \tfrac{t}{2|\alpha|}\right) \leq \varepsilon - 1\right\} \in I,$$

$$A_2 = \left\{k \in \mathbb{N}: \mu_A^r\left(y_k^/ - L_2, \tfrac{t}{2|\beta|}\right) \geq 1 - \varepsilon \; veya \; \mu_A^\ell\left(y_k^/ - L_2, \tfrac{t}{2|\beta|}\right) \leq \varepsilon - 1\right\} \in I,$$

ve $A_3 = A_1 \cup A_2$ olacak şekilde $A_3 \in I$ alalım. Buradan her $(x^/), (y^/) \in \mathcal{Z}_{\mathfrak{B}}^I$ için $m \in A_3$ olsun,

$$\mu_A^r\left(x_m^/ - L_1, \frac{t}{2|\alpha|}\right) \geq 1 - \varepsilon \; veya \; \mu_A^\ell\left(x_m^/ - L_1, \frac{t}{2|\alpha|}\right) \leq \varepsilon - 1$$

$$\mu_A^r\left(y_m^{/}-L_2,\frac{t}{2|\beta|}\right)\geq 1-\varepsilon \; veya \; \mu_A^{\ell}\left(y_m^{/}-L_2,\frac{t}{2|\beta|}\right)\leq \varepsilon-1$$

olarak yazılsın buradan,

$$\begin{aligned}\mu_A^r\big((\alpha x_m^{/}+\beta y_m^{/})-(\alpha L_1+\beta L_2),t\big) &= \mu_A^r\left(\left(\alpha x_m^{/}-\alpha L_1\right)+\left(\beta y_m^{/}-\beta L_2\right),t\right)\\ &\geq \mu_A^r\left(\alpha x_m^{/}-\alpha L_1,\tfrac{t}{2}\right)\Delta\,\mu_A^r\left(\beta y_m^{/}-\beta L_2,\tfrac{t}{2}\right)\\ &= \mu_A^r\left(x_m^{/}-L_1,\tfrac{t}{2|\alpha|}\right)\,\Delta\,\mu_A^r\left(y_m^{/}-L_2,\tfrac{t}{2|\beta|}\right)\\ &\geq (1-\varepsilon)\Delta(1-\varepsilon)\\ &= (1-\varepsilon)\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}\mu_A^{\ell}\big((\alpha x_m^{/}+\beta y_m^{/})-(\alpha L_1+\beta L_2),t\big) &= \mu_A^{\ell}\left(\left(\alpha x_m^{/}-\alpha L_1\right)+\left(\beta y_m^{/}-\beta L_2\right),t\right)\\ &\leq \mu_A^{\ell}\left(\alpha x_m^{/}-\alpha L_1,\tfrac{t}{2}\right)\,\nabla\,\mu_A^{\ell}\left(\beta y_m^{/}-\beta L_2,\tfrac{t}{2}\right)\\ &= \mu_A^{\ell}\left(x_m^{/}-L_1,\tfrac{t}{2|\alpha|}\right)\,\nabla\,\mu_A^{\ell}\left(y_m^{/}-L_2,\tfrac{t}{2|\beta|}\right)\\ &\leq (\varepsilon-1)\nabla(\varepsilon-1)\\ &= (\varepsilon-1)\end{aligned}$$

yazılır.

$\left\{k\in\mathbb{N}:\mu_A^r\big((\alpha x_k^{/}+\beta y_k^{/})-(\alpha L_1+\beta L_2),t\big)\geq 1-\varepsilon \; veya \; \mu_A^{\ell}\big((\alpha x_k^{/}+\beta y_k^{/})-(\alpha L_1+\beta L_2),t\big)\leq \varepsilon-1\right\}\subset A_3$ olduğundan $\mathbb{Z}_{\mathfrak{B}}^{I}$ bir lineer uzaydır.

İspat 2: $(x^{/}),(y^{/})\in \mathbb{Z}_{\mathfrak{B}}^{I}$ ve α,β skaler olsun. O halde verilen her $\varepsilon>0$ için;

$$A_1=\left\{k\in\mathbb{N}:\mu_A^r\left(x_k^{/}-L_1,\tfrac{t}{2|\alpha|}\right)\geq 1-\varepsilon \; veya \; \mu_A^{\ell}\left(x_k^{/}-L_1,\tfrac{t}{2|\alpha|}\right)\leq \varepsilon-1\right\}\in I,$$

$$A_2=\left\{k\in\mathbb{N}:\mu_A^r\left(y_k^{/}-L_2,\tfrac{t}{2|\beta|}\right)\geq 1-\varepsilon \; veya \; \mu_A^{\ell}\left(y_k^{/}-L_2,\tfrac{t}{2|\beta|}\right)\leq \varepsilon-1\right\}\in I,$$

$A_1^c = \left\{k \in \mathbb{N}: 1 - \mu_A^r\left(x_k^{/} - L_1, \frac{t}{2|\alpha|}\right) \leq \varepsilon \; veya \; -1 - \mu_A^\ell\left(x_k^{/} - L_1, \frac{t}{2|\alpha|}\right) \geq -\varepsilon\right\} \in F(I)$

$A_2^c = \left\{k \in \mathbb{N}: 1 - \mu_A^r\left(y_k^{/} - L_2, \frac{t}{2|\alpha|}\right) \leq \varepsilon \; veya \; -1 - \mu_A^\ell\left(y_k^{/} - L_2, \frac{t}{2|\alpha|}\right) \geq -\varepsilon\right\} \in F(I)$

ve $A_3 = A_1 \cup A_2$ olacak şekilde $A_3 \in I$ alınsın. Buradan A_3^c nin $F(I)$ da boştan farklı bir küme olduğu sonucu ortaya çıkar. Bu durumu her $(x^{/}), (y^{/}) \in \mathbb{Z}_{\mathfrak{B}}^{I}$ için,

$A_3^c \subset \{k \in \mathbb{N}: 1 - \mu_A^r\big((\alpha x_k^{/} + \beta y_k^{/}) - (\alpha L_1 + \beta L_2), t\big) \leq \varepsilon \; veya \; -1 - \mu_A^\ell\big((\alpha x_k^{/} + \beta y_k^{/}) - (\alpha L_1 + \beta L_2), t\big) \geq -\varepsilon\}$

olduğunun gösterilmesi gerekmektedir. $m \in A_3^c$ olsun,

$1 - \mu_A^r\left(x_m^{/} - L_1, \frac{t}{2|\alpha|}\right) \leq \varepsilon \; veya \; -1 - \mu_A^\ell\left(x_m^{/} - L_1, \frac{t}{2|\alpha|}\right) \geq -\varepsilon$

ve

$1 - \mu_A^r\left(y_m^{/} - L_2, \frac{t}{2|\beta|}\right) \leq \varepsilon \; veya \; -1 - \mu_A^\ell\left(y_m^{/} - L_2, \frac{t}{2|\beta|}\right) \geq -\varepsilon$ olarak yazılır. Buradan

$$\begin{aligned}
\mu_A^r\big((\alpha x_m^{/} + \beta y_m^{/}) - (\alpha L_1 + \beta L_2), t\big) &= \mu_A^r\left((\alpha x_m^{/} - \alpha L_1) + (\beta y_m^{/} - \beta L_2), t\right) \\
&\geq \mu_A^r\left(\alpha x_m^{/} - \alpha L_1, \frac{t}{2}\right) \Delta\, \mu_A^r\left(\beta y_m^{/} - \beta L_2, \frac{t}{2}\right) \\
&= \mu_A^r\left(x_m^{/} - L_1, \frac{t}{2|\alpha|}\right) \Delta\, \mu_A^r\left(y_m^{/} - L_2, \frac{t}{2|\beta|}\right) \\
&\geq (1-\varepsilon)\Delta(1-\varepsilon) \\
&= (1-\varepsilon).
\end{aligned}$$

$\mu_A^r\big((\alpha x_m^{/} + \beta y_m^{/}) - (\alpha L_1 + \beta L_2), t\big) \geq 1 - \varepsilon$ ifadesinden

$1 - \mu_A^r\big((\alpha x_m^{/} + \beta y_m^{/}) - (\alpha L_1 + \beta L_2), t\big) \leq \varepsilon$ elde edilir. Benzer şekilde,

$$\mu_A^\ell\big((\alpha x_m^{/} + \beta y_m^{/}) - (\alpha L_1 + \beta L_2), t\big) = \mu_A^\ell\left((\alpha x_m^{/} - \alpha L_1) + (\beta y_m^{/} - \beta L_2), t\right)$$

$$\leq \mu_A^\ell\left(\alpha x_m^/ - \alpha L_1, \tfrac{t}{2}\right) \nabla\, \mu_A^\ell\left(\beta y_m^/ - \beta L_2, \tfrac{t}{2}\right)$$

$$= \mu_A^\ell\left(x_m^/ - L_1, \tfrac{t}{2|\alpha|}\right) \nabla\, \mu_A^\ell\left(y_m^/ - L_2, \tfrac{t}{2|\beta|}\right)$$

$$\leq (\varepsilon - 1)\nabla(\varepsilon - 1)$$

$$= (\varepsilon - 1)$$

$\mu_A^\ell\big((\alpha x_m^/ + \beta y_m^/) - (\alpha L_1 + \beta L_2), t\big) \leq (\varepsilon - 1)$ ifadesi elde edilir. Buradan

$-1 - \mu_A^\ell\big((\alpha x_m^/ + \beta y_m^/) - (\alpha L_1 + \beta L_2), t\big) \geq -\varepsilon$ yazılır.

Bu ifade aşağıdaki gibi ifade edilir;

$A_3^c \subset \{k \in \mathbb{N}: 1 - \mu_A^r\big((\alpha x_k^/ + \beta y_k^/) - (\alpha L_1 + \beta L_2), t\big) \leq \varepsilon\ veya\ -1 - \mu_A^\ell\big((\alpha x_k^/ + \beta y_k^/) - (\alpha L_1 + \beta L_2), t\big) \geq -\varepsilon\}$.

Buradan $Z_{\mathfrak{B}}^I$ lineer uzaydır.

Teorem 4.6. Her açık yuvar $B_{x^/}(r,t)$, $Z_{\mathfrak{B}}^I$ de bir açık kümedir.

İspat: $B_{x^/}(r,t)$ kümesinin $x^/$ merkezli r yarıçaplı bir açık yuvar olduğu kabul edilsin.

$B_{x^/}(r,t) = \{k \in \mathbb{N}: \mu_A^r(x_{k^/} - L, t) \geq 1 - r\ veya\ \mu_A^\ell(x_{k^/} - L, t) \leq r - 1\} \in I$ olduğu bilindiğine göre $y^/ \in B_{x^/}(r,t)$ olacak şekilde $y^/$ elemanı alınsın. Buradan $\mu_A^r(x^/ - y^/, t_0) \geq 1 - r$ ve $\mu_A^\ell(x^/ - y^/, t_0) \leq r - 1$ olacak şekilde bir $t_0 \in (0,t)$ vardır. $r_0 = \mu_A^r(x^/ - y^/, t_0)$ olarak kabul edilirse $r_0 > 1 - s > 1 - r$ olacak şekilde bir $s \in (0,1)$ vardır. $r_0 > 1 - s$ ifadesinden $r_0 \Delta r_1 > 1 - s$ ve $(r_0 - 1)\nabla(r_2 - 1) < s - 1$ olacak şekilde $r_1, r_2 \in (0,1)$ bulunabilir. $r_3 = max\{r_1, r_2\}$ alınsın ve $B_{y^/}(1 - r_3, t - t_0)$ açık yuvarı göz önüne alınsın. Teoremin ispatı için $B_{y^/}(1 - r_3, t - t_0) \subset B_{x^/}(r,t)$ olduğu ispatlanmalıdır. O halde, $z^/ \in B_{y^/}(1 - r_3, t - t_0)$ olsun. $\mu_A^r(y^/ - z^/, t - t_0) > r_3$ ve $\mu_A^\ell(y^/ - z^/, t - t_0) < r_3$ yazılabilir.

$\mu_A^r(x^/ - z^/, t) \geq \mu_A^r(x^/ - y^/, t_0)\Delta\mu_A^r(y^/ - z^/, t - t_0) \geq r_0 \Delta r_3 \geq r_0 \Delta r_1 > 1 - s > 1 - r$ olduğu görülür. Aynı şekilde,

$\mu_A^\ell(x^/ - z^/, t) \leq \mu_A^\ell(x^/ - y^/, t_0) \nabla \mu_A^\ell(y^/ - z^/, t - t_0) \leq (r_0 - 1)\nabla(r_2 - 1) < s - 1 < r - 1$ olarak ifade edilir. Böylece $z^/ \in B_{x^/}(r,t)$ olduğu görülür ve dolayısıyla $B_{y^/}(1 - r_3, t - t_0) \subset B_{x^/}(r,t)$ dır.

Sonuç: $\mathbb{Z}_{\mathfrak{B}}^I$ BFNS olmak üzere;

$\tau_{\mathfrak{B}} = \{X \subset \mathbb{Z}_{\mathfrak{B}}^I : \forall\, x \in X\ için, t > 0\ ve\ r \in (0,1)\ olacak\ şekilde\ B_{x^/}(r,t) \subset X\ vardır\}$ şeklinde tanımlanan $\tau_{\mathfrak{B}}$, $\mathbb{Z}_{\mathfrak{B}}^I$ üzerinde bir topolojidir.

Teorem 4.7. $\mathbb{Z}_{\mathfrak{B}}^I$ ve $\mathbb{Z}_{0\mathfrak{B}}^I$ Hausdorff uzaylardır.

İspat: $x^/, y^/ \in \mathbb{Z}_{\mathfrak{B}}^I$ ve $x^/ \neq y^/$ olsun. Bilindiği üzere $0 \leq \mu_A^r(x^/ - y^/, t) \leq 1$ ve $-1 \leq \mu_A^\ell(x^/ - y^/, t) \leq 0$ dir. Burada $r_1 = \mu_A^r(x^/ - y^/, t)$ ve $r_2 = \mu_A^\ell(x^/ - y^/, t)$ ve $r = max\{r_1, -r_2\}$ alınsın. Her $r_0 \in (r, 1)$ olmak üzere $r_3 \Delta r_4 \geq r_0$ ve $(r_3 - 1)\nabla(r_4 - 1) \leq r_0 - 1$ olacak şekilde r_3, r_4 tanımlansın. $r_5 = max\{r_3, r_4\}$ olacak şekilde $B_{x^/}\left(r_5 - 1, \frac{t}{2}\right)$ ve $B_{y^/}\left(r_5 - 1, \frac{t}{2}\right)$ açık yuvarları ele alınsın. $\mathbb{Z}_{\mathfrak{B}}^I$ nın Hausdorff uzayı olduğunu göstermek için $B_{x^/}\left(r_5 - 1, \frac{t}{2}\right) \cap B_{y^/}\left(r_5 - 1, \frac{t}{2}\right) = \emptyset$ olduğunu göstermek yeterlidir. Bu sebeple bir $z^/ \in B_{x^/}\left(r_5 - 1, \frac{t}{2}\right) \cap B_{y^/}\left(r_5 - 1, \frac{t}{2}\right)$ elemanı alınsın.

$$r_1 = \mu_A^r(x^/ - y^/, t) \geq \mu_A^r\left(x^/ - z^/, \frac{t}{2}\right) \Delta \mu_A^r\left(z^/ - y^/, \frac{t}{2}\right) \geq r_5 \Delta r_5 \geq r_3 \Delta r_3 \geq r_0 > r_1$$

ve

$$r_2 = \mu_A^\ell(x^/ - y^/, t) \leq \mu_A^\ell\left(x^/ - z^/, \frac{t}{2}\right) \nabla \mu_A^\ell\left(z^/ - y^/, \frac{t}{2}\right) \leq (r_5 - 1)\nabla(r_5 - 1) \leq (r_4 - 1)\nabla(r_4 - 1) \leq r_0 - 1 < r_2$$

yazılır ve bu bir çelişkidir. Yani $B_{x^/}\left(r_5 - 1, \frac{t}{2}\right) \cap B_{y^/}\left(r_5 - 1, \frac{t}{2}\right) = \emptyset$ olduğu görülür. O halde $\mathbb{Z}_{\mathfrak{B}}^I$ Hausdorff uzayıdır. $\mathbb{Z}_{0\mathfrak{B}}^I$ için ispat benzer şekilde yapılabilir.

Teorem 4.8. $\mathbb{Z}_{\mathfrak{B}}^I$ bir BFNS ve $\tau_{\mathfrak{B}}$, $\mathbb{Z}_{\mathfrak{B}}^I$ üzerinde bir topolojidir. Bir dizi $x_k{}^/ \in \mathbb{Z}_{\mathfrak{B}}^I$ olsun. $x_k{}^/ \to x^/$ ancak ve ancak her $k \to \infty$ için $\mu_A^r(x_k{}^/ - x^/, t) \to 1$ ve $\mu_A^\ell(x_k{}^/ - x^/, t) \to -1$ dir.

İspat: $t > 0$ ve $x_k{}^{/} \to x^{/}$ olsun. O halde $r \in (0,1)$ için öyle bir $n_0 \in \mathbb{N}$ vardır ki tüm $k \geq n_0$ için $x_k{}^{/} \in B_{x^{/}}(r,t)$ dır.

$B_{x^{/}}(r,t) = \{k \in \mathbb{N}: \mu_A^r(x_k{}^{/} - x^{/}, t) \geq 1 - r \; veya \; \mu_A^{\ell}(x_k{}^{/} - x^{/}, t) \leq r - 1\} \in I$ olduğu tanım 4.9. da verilmiştir. $\mu_A^r(x_k{}^{/} - x^{/}, t) \geq 1 - r$ ve $\mu_A^{\ell}(x_k{}^{/} - x^{/}, t) \leq r - 1$ olduğundan $\mu_A^r(x_k{}^{/} - x^{/}, t) \to 1$ ve $\mu_A^{\ell}(x_k{}^{/} - x^{/}, t) \to -1$ olduğu görülür.

Tersine her $t > 0$ ve $k \to \infty$ için $\mu_A^r(x_k{}^{/} - x^{/}, t) \to 1$ ve $\mu_A^{\ell}(x_k{}^{/} - x^{/}, t) \to -1$ ise $r \in (0,1)$ ve tüm $k \geq n_0$ için $1 - \mu_A^r(x_k{}^{/} - x^{/}, t) < r$ ve $-1 - \mu_A^{\ell}(x_k{}^{/} - x^{/}, t) < r$ olacak şekilde bir $n_0 \in \mathbb{N}$ vardır. Buradan $\mu_A^r(x_k{}^{/} - x^{/}, t) \geq 1 - r$ ve $\mu_A^{\ell}(x_k{}^{/} - x^{/}, t) \leq r - 1$ sonucu ortaya çıkar. Böylece tüm $k \geq n_0$ $x_k{}^{/} \in B_{x^{/}}(r,t)$ olur ve buradan $x_k{}^{/} \to x^{/}$ olur.

BÖLÜM 5

SONUÇ VE ÖNERİLER

Yapılan literatür taramalarında, Zweier $I-$yakınsak dizi uzayları ile ilgili birtakım çalışmalar yapılmasına rağmen, çift kutuplu bulanık Zweier $I-$yakınsak dizi uzayları ile ilgili çalışmaların sınırlı sayıda olduğu görülmektedir. Bu bulgu eksikliğini doldurmaya odaklanan bu çalışmada; çift kutuplu bulanık normlu uzay, çift kutuplu bulanık normlu uzayda yakınsaklık, çift kutuplu bulanık normlu uzayda ideal yakınsaklık tanımları yapılmıştır. Ayrıca Zweier matrisi ile çift kutuplu bulanık kümeler kullanılarak çift kutuplu bulanık Zweier $I-$yakınsak dizi uzayları inşa edilmiş ve bazı topolojik özellikleri incelenmiştir. Bu konuda literatürde henüz herhangi bir çalışmaya rastlanmadığından bu bulgular çalışmamızın yazına katkısı olarak düşünülebilir.

Çalışmanın bulguları doğrultusunda teorik ve uygulamaya dönük öneriler şu şekillerde sunulabilir:

- Belirsizlik ve karmaşıklığın yüksek olduğu günümüzde daha etkili analiz ve kararlar alınması için siber güvenlik, akıllı şehirler (trafik yönetimi, akıllı altyapı gibi), robotik sistemler gibi alanlarda uygulanabilir.
- Bununla birlikte belirsizliğin ve bulanıklığın daha detaylı bir şekilde modellenmesi ve analizi için güçlü bir araç olarak tıbbi teşhis ve sağlık sistemleri, mühendislik ve kontrol sistemleri gibi birçok alanda kullanılma potansiyeli yüksektir.
- Küresel salgınlarla mücadelede önemli bir rol oynayan aşıların tercih edilmesi, bu konudaki kaynak yönetimi ve karar verme algoritmalarında çift kutuplu bulanık metrik uzayının kullanılabileceği Zararsız ve Riaz tarafından da önerilmektedir [34].

KAYNAKLAR

1. Zadeh, L. A. , "Fuzzy sets", *Information and Control*, c. 8, sy 3, ss. 338-353, 1965.
2. Atanassov, K. T., "Intuitionistic fuzzy sets, VII ITKR's Session, Sofia deposed in Central Sci", *Technical Library of Bulg. Acad. of Sci*, c. 1697, s. 84, 1983.
3. Yager, R. R. ve Abbasov, A. M. , "Pythagorean Membership Grades, Complex Numbers, and Decision Making", *Int. J. Intell. Syst.*, c. 28, sy 5, ss. 436-452, 2013.
4. Yager, R. R. , "Pythagorean Membership Grades in Multicriteria Decision Making", *IEEE Trans. Fuzzy Syst.*, c. 22, sy 4, ss. 958-965, 2014.
5. Yager, R. R. , "Generalized Orthopair Fuzzy Sets", *IEEE Trans. Fuzzy Syst.*, c. 25, sy 5, ss. 1222-1230, 2017, doi: 10.1109/TFUZZ.2016.2604005.
6. Smarandache, F., "Neutrosophy, A New Branch of Philosophy", *Multiple Valued Logic / An International Journal*, published by Taylor & Francis Group, UK and USA, ISSN 1023-6627, Vol. 8, No. 3, pp. 297-384, 2002.
7. Zhang , W.R., "Bipolar fuzzy sets and relations: a computational framework for cognitive modeling and multiagent decision analysis", *program adı: First International Joint Conference of The North American Fuzzy Information Processing Society Biannual Conference. The Industrial Fuzzy Control and Intelligent Systems Conference, and the NASA Joint Technology Workshop on Neural Networks and Fuzzy Logic, San Antonio,* TX, USA: IEEE, ss. 305-309, 1994,.
8. Chen, J. ,Li S., Ma S., ve Wang, X. , "m -Polar Fuzzy Sets: An Extension of Bipolar Fuzzy Sets", *The Scientific World Journal*, c. 2014, ss. 1-8, 2014.
9. Matloka, M., "Sequences of fuzzy numbers", *Busefal*, c. 28, sy 1, ss. 28-37, 1986.
10. Nanda, S., "On sequences of fuzzy numbers", *Fuzzy Sets and Systems*, c. 33, sy 1, ss. 123-126, Eki. 1989.
11. Nuray, F. ve Savas, E., "Statistical convergence of sequences of fuzzy numbers", *Mathematica Slovaca*, c. 45, sy 3, ss. 269-273, 1995.

12. Kirişci M. ve Şimşek, N. "Neutrosophic normed spaces and statistical convergence", *J Anal*, c. 28, sy 4, ss. 1059-1073, 2020.
13. Karakus, S., Demirci, K. ve Duman, O. , "Statistical convergence on intuitionistic fuzzy normed spaces", *Chaos, Solitons & Fractals*, c. 35, sy 4, ss. 763-769, 2008.
14. Kostyrko, P. , Wilczyński, W. ve Šalát, T., "I-Convergence", *Real Analysis Exchange*, c. 26, sy 2, ss. 669-686, 2000.
15. Nuray, F., "I-convergence of sequences of fuzzy numbers", *New Math. and Nat. Computation*, c. 04, sy 02, ss. 231-236, 2008.
16. Kişi, Ö. , "Ideal convergence of sequences in neutrosophic normed spaces", *IFS*, c. 41, sy 2, ss. 2581-2590, Eyl. 2021.
17. Khan, V. A. , Ebadullah, K. ve Rababah, R. K. A. , "Intuitionistic fuzzy zweier I-convergent sequence spaces", *Functinal Analysis: Theory, methods and applications*, c. 1, ss. 1-7, 2015.
18. Şengönül, M. , "On the zweier sequence spaces", *Demonstratio Mathematica*, c. 40, sy 1, 2007.
19. Şengönül, M. , "On the Zweier Sequence Spaces of Fuzzy Numbers", *International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences*, c. 2014, ss. 1-9, 2014.
20. Khan, V. A. , Ebadullah, K. ve Aligarh, Y. , "On Zweier I-convergent sequence spaces", *Proyecciones (Antofagasta)*, c. 33, sy 3, ss. 259-276, 2014.
21. Uluçay, C. , Fonksiyonlar teorisi ve Riemann yüzeyleri, 2.baskı. *TC, Karadeniz Teknik Üniversitesi, Temel Bilimler Fakültesi Yayınları*, 1978.
22. Bayraktar, M. , Fonksiyonel analiz, 1. baskı. 1987.
23. Maddox, I. J. , Elements of Functional Analysis, 2. bs. CUP Archive, 1988.
24. Banach, S., Théorie des opérations linéaires, 1 c. *Warszawa: Instytut Matematyczny Polskiej Akademii Nauk*, 1932.
25. Menger, K. , "Statistical Metrics", *Proc. Natl. Acad. Sci. U.S.A.*, c. 28, sy 12, ss. 535-537, 1942, doi: 10.1073/pnas.28.12.535.
26. Schweizer, B. ve Sklar, A. , Probabilistic Metric. Spaces, 1983.
27. George, A. ve Veeramani, P. , "On some results in fuzzy metric spaces", *Fuzzy Sets and Systems*, c. 64, sy 3, ss. 395-399, 1994.

28. Grabiec, M. , “Fixed points in fuzzy metric spaces”, *Fuzzy Sets and Systems*, c. 27, sy 3, ss. 385-389, 1988.
29. Atanassov, K. T. , “More on intuitionistic fuzzy sets”, *Fuzzy Sets and Systems*, c. 33, sy 1, ss. 37-45, 1989.
30. Atanassov, K., “Mathematics of Intuitionistic Fuzzy Sets”, içinde *Fuzzy Logic in Its 50th Year*, c. 341, C. Kahraman, U. Kaymak, ve A. Yazici, Ed., içinde Studies in Fuzziness and Soft Computing, vol. 341. , Cham: Springer International Publishing, ss. 61-86, 2016.
31. Smarandache, F. , “Neutrosophic set - a generalization of the intuitionistic fuzzy set”, içinde *2006 IEEE International Conference on Granular Computing*, Atlanta, GA, USA: IEEE, ss. 38-42, 2006.
32. Pal, M. ve Mondal, S. , “Bipolar fuzzy matrices”, *Soft computing*, c. 23, sy 20, ss. 9885-9897, 2019.
33. Riaz, M. , Garg, H. , Farid, H. M. ve Chinram, R. , “Multi-Criteria Decision Making Based on Bipolar Picture Fuzzy Operators and New Distance Measures”, *Computer Modeling in Engineering and Sciences*, c. 127, ss. 771-800, 2021.
34. Zararsız, Z. ve Riaz, M. , “Bipolar fuzzy metric spaces with application”, *Comp. Appl. Math.*, c. 41, sy 1, s. 49, 2022.
35. Niven, I. , Zuckerman, H. S. ve Montgomery, H. L., *An introduction to the theory of numbers*, 5th ed. New York: Wiley, 1991.
36. Fast, H. , “Sur la convergence statistique”, içinde *Colloquium mathematicae*, ss. 241-244, 1951.
37. Kuratowski, K. , Topology: Volume *I*. Elsevier, 2014.
38. Kostyrko, P. , Macˇaj, M. ve Šalát, T. , “Statistical convergence and I-convergence”, *Real Analysis Exch*, 2000.
39. Buck, R. C. , “The Measure Theoretic Approach to Density”, *American Journal of Mathematics*, c. 68, sy 4, s. 560, 1946.
40. Buck, R. C. , “Generalized Asymptotic Density”, *American Journal of Mathematics*, c. 75, sy 2, s. 335, 1953.
41. Miller, H. I. , “A Measure Theoretıcal Subsequence Characterızatıon Of Statıstıcal Convergence”, *Transactıons Of The Amerıcan Mathematıcal Socıety*, sy 5, ss. 1811-1819, 1995.

42. Šalát, T. , Tripathy, B. ve Ziman, M. , “On some properties of I-convergence”, *Tatra Mountains Mathematical Publications*, c. 28, 2004.
43. Başar, F. , Summability theory and its applications. Chapman and Hall/CRC, 2022.
44. Wilansky, A. , Summability Through Functional Analysis. Elsevier, 2000.
45. Altay, B. , Basar, F. ve Mursaleen, M. , “On the Euler sequence spaces which include the spaces $l_p$and l_∞,I”, *Information Sciences*, c. 176, sy 10, ss. 1450-1462, 2006.
46. Malkowsky, E., “Recent results in the theory of matrix transformations in sequence spaces”, *Matematicki vesnik -Beograd-*, c. 49, ss. 187-196, 1997.
47. Ng, P. N. ve Lee, P. Y. , “Cesàro sequence spaces of nonabsolute type”, *Commentationes mathematicae*, c. 20, sy 2, 1978.